Banach 極限

Theorem. 数列空間 ℓ^∞ 上で定義された線型汎関数 LIM で以下の条件を満たすものが存在し, この線形汎関数 LIM を Banach 極限という.

(i) $x = \{x_n\} \in \ell^\infty, x_n \geq 0\ (n \in \mathbb{N})$ に対して $\mathrm{LIM}(x) \geq 0$.

(ii) $|\mathrm{LIM}(x)| \leq \|x\|_\infty\ \ (x \in \ell^\infty)$.

(iii) ℓ^∞ 上の線形作用素 T が $x = \{x_n\} \in \ell^\infty$ に対して $Tx = \{x_{n+1}\}$ と作用するとき, $\mathrm{LIM}(Tx) = \mathrm{LIM}(x)$.

(iv) すべての $x = \{x_n\} \in \ell^\infty$ に対して $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \mathrm{LIM}(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Proof. Banach 極限はその性質から通常の極限の概念を拡張したものであることがわかるので, Hahn-Banach の拡張定理を用いて Banach 極限の候補となる線型汎関数の存在を示す. $p : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ を $p(x) = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ とする. このとき, $\alpha > 0, x, y \in \ell^\infty$ に対して, $p(\alpha x) = \alpha p(x), p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ が成り立つことがわかる. また, ℓ^∞ の部分空間で, 収束する数列からなる空間を c と表す. 今, $f : c \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ と定義すると, c 上で f と p は一致する. よって, Hahn-Banach の拡張定理から f の ℓ^∞ 上へ拡張された線形汎関数 F が存在し, $F(x) \leq p(x)\ (x \in \ell^\infty)$ が成り立つことがわかる.

次に Banach 極限の性質 (i)〜(iv) が成り立つことを確認していく.

(i) $x \in \ell^\infty$ を $x_n \geq 0\ (n \in \mathbb{N})$ とする. このとき $-\mathrm{LIM}(x) = \mathrm{LIM}(-x) \leq p(-x)$ であるから

$$\mathrm{LIM}(x) \geq -p(-x) = -\limsup_{n\to\infty} \frac{-x_1 - \cdots - x_n}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq 0$$

より成り立つことがわかる.

(ii) $x \in \ell^\infty$ とする.

$$p(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|x_1| + \cdots + |x_n|}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty$$

であり, Hahn-Banach の拡張定理から $\mathrm{LIM}(x) \leq p(x)$ より $\mathrm{LIM}(x) \leq \|x\|_\infty$ となる. x のかわりに $-x$ を考えると $-\|x\|_\infty \leq \mathrm{LIM}(x)$ となり, この 2 つの結果をあわせることにより成り立つことがわかる.

(iii) $x \in \ell^\infty$ に対して $\mathrm{LIM}(x - Tx) \leq p(x - Tx) = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{x_1 - x_{n+1}}{n} = 0$ より $\mathrm{LIM}(x) \leq \mathrm{LIM}(Tx)$ がわかる. また, x のかわりに $-x$ を考えると $-\mathrm{LIM}(x) \leq -\mathrm{LIM}(Tx)$ より $\mathrm{LIM}(x) \geq \mathrm{LIM}(Tx)$ となり $\mathrm{LIM}(Tx) = \mathrm{LIM}(x)$ が成り立つことがわかる.

(iv) $x \in \ell^\infty, \varepsilon > 0$ に対して $\inf_n x_n \leq x_N \leq \inf_n x_n + \varepsilon$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ をとる. このとき $x_n + \varepsilon - x_N \geq \inf_n x_n + \varepsilon - x_N \geq 0$ となることがわかる. よって (i) から $0 \leq \mathrm{LIM}(x + \varepsilon - x_N) = \mathrm{LIM}(x) + \varepsilon - x_N$ となるから, $\inf_n x_n \leq x_N \leq \mathrm{LIM}(x) + \varepsilon$ がわかり, $\varepsilon > 0$ は任意であるから $\inf_n x_n \leq \mathrm{LIM}(x)$ となる. また, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, (i) より $\inf_{n\geq k} x_n = \inf_n (T^k x)_n \leq \mathrm{LIM}(T^k x) = \mathrm{LIM}(x)$ が成り立つ. よって

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k \leq \sup_n \mathrm{LIM}(x) = \mathrm{LIM}(x)$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty}(-x_n) \geq -\mathrm{LIM}(-x) = \mathrm{LIM}(x)$$

となり, この 2 つの結果をあわせることにより成り立つことがわかる.

以上により, Banach 極限 $\mathrm{LIM} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ が存在することが示された. ■